Esempio 1

Calcolare la probabilità, lanciando un dado, di ottenere un numero superiore a 4.
Si osservi che nel lancio di un dado si può ottenere un numero superiore a 4 solo se esce 5 oppure 6, quindi si hanno 2 casi favorevoli.
I casi possibili sono 6 (le sei facce del dado). Pertanto, utilizzando la (4), si ha:

$$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La **teoria assiomatica della probabilità** non fornisce indicazioni su come calcolare la probabilità ma risponde all'esigenza di individuare gli assiomi su cui basare la teoria della probabilità e da cui poi far discendere postulati e teoremi. È quindi una teoria comune a tutte le definizioni di probabilità che vanno dall'approccio frequentista a quello soggettivista.

Probabilità (classica) di un evento: il rapporto fra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili, supposti tutti ugualmente possibili.
Probabilità (frequentista) di un evento: il numero che esprime la frequenza relativa dell'evento in un gran numero di prove precedenti tutte fatte nelle stesse condizioni.
Probabilità soggettiva di un evento: la misura del grado di fiducia che un individuo coerente assegna al verificarsi di un dato evento in base alle sue conoscenze.

Eventi elementari: tutti i possibili risultati che si possono avere da un esperimento aleatorio oggetto di studio.
Spazio campionario o delle probabilità S: insieme di tutti i possibili eventi elementari.
Sia S lo spazio delle probabilità, ossia l'insieme di tutti i possibili eventi elementari e si indichi con $\mathcal{H}$ una famiglia (detta $\sigma - \text{algebra}$) di sottoinsiemi di S tale che:

- S è un elemento della famiglia $\mathcal{H} : S \in \mathcal{H}$;
- Se A e B sono sottoinsiemi di S e sono elementi della famiglia di eventi $\mathcal{H}$, allora anche gli eventi complementari $\overline{A}$ e $\overline{B}$, l'evento inter-

sezione $A \bigcap B$ e l'evento unione $A \bigcup B$ sono elementi di $\mathcal{H}$.
Se S è un insieme finito, ad ogni evento A è possibile associare un numero $P\,(A)$, detto probabilità dell'evento A, tale che

$$P:\ A \subseteq S \longrightarrow P(A) \in [0,\ 1]$$

- la probabilità di un evento è sempre positiva: $P(A) \geq 0$;
- la probabilità di tutto lo spazio delle probabilità è sempre pari ad 1: $P(S) = 1$;
- se A e B sono eventi incompatibili (cioè $A \bigcap B = \emptyset$) allora
  $$P(A \bigcup B) = P\,(A) + P\,(B)$$
- la probabilità dell'evento impossibile è nulla
  $$1 = P(S) = P(S \bigcup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing) \implies P(\varnothing) = 0$$
- la probabilità di un evento è uguale ad 1 meno la probabilità dell'evento contrario
  $$1 = P(S) = P(A \bigcup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \implies P(A) = 1 - P(\overline{A})$$
- la probabilità di un evento è sempre compresa tra 0 e 1
  $$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \implies 0 \leq P(A) \leq 1$$
- se A è contenuto in B allora la probabilità dell'evento A è minore della probabilità dell'evento B (è uguale se $A = B$)
  $$\text{se } A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$$
- se A e B sono due eventi incompatibili
  $$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$$

- se A e B e sono due eventi qualsiasi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Comparazione della terminologia tra gli insiemi e gli eventi.

Insiemi/Eventi	
S, spazio campionario	evento certo
$\emptyset$, insieme vuoto	evento impossibile
A, insieme	l'evento si verifica
$\overline{A}$, insieme complementare di A	l'evento non si verifica
A⋃B, insieme unione	si verifica almeno uno dei due eventi
A⋂B, insieme intersezione	si verificano simultaneamente i due eventi
A\B, sottrazione A⋂$\overline{B}$	si verifica un evento e non si verifica l'altro
A⋂B=$\emptyset$, insiemi disgiunti	eventi incompatibili
B⊆A, B incluso in A	il verificarsi di un evento implica il verificarsi dell'altro